

Title	函数方程式 $f(f(x)) = F(x)$ 二就テ
Author(s)	南雲, 道夫
Citation	全国紙上数学談話会. 57 p.1-p.5
Issue Date	1935-09-13
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74119
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

197. 函數方程式 $f(f(x)) = F(x)$ 求解

南 雲 道 夫 (阪大)

“ $F(x)$ ヲ既知函數, $f(x)$ ヲ未知函數トシテ函數方程式

$f(f(x)) = F(x)$, $f(f(f(x))) = F(x)$, 等々ノ
一般解ヲ求ム”トイフ問題ハ $F(x) \times f(x)$ ニ關スル假定ノ
如何ニヨツテ非常ニムツカシイ問題ニ思ハレル。

次ニ實變數ノ場合ニツイテ, $F(x)$ が $a \leq x \leq b$ デ
連続, 純單調増加 且ツ

$$F(a) = a, \quad F(b) = b$$

($a = -\infty$, 又 $b = +\infty$ デモヨイ) ト假定スル。此ノ假定
ノ下ニ $a \leq x \leq b$ ニ於テ純單調増加連続デ $f(a) = a$,
 $f(b) = b$ ナル $f(x)$ ヲ求メテ見ヨウ。

I. $F(x)$ ニ關スル上ノ假定ニヨリ $x' = F(x)$ ナル変
換 $x \longleftrightarrow x'$ ハ區間 $a \leq x \leq b$ ヲバ自分自身ヘ一對一且ツ
連続ニ寫像スル。 $x' = f(x)$ ナル変換モ同様デアアル。

今區間 (a, b) 内デ特ニ寫像 $x' = F(x)$ ノ不動点
[$x = f(x)$ ナル点] 1 全体ヲ除ケバ、有限個乃至可附番個ノ
區間ガ残ル。ソノ任意ノ一ツヲ (α, β) トスレバ, (α, β)
ハ $x' = F(x)$ ニヨツテ (α, β) 自身ニ一對一連続ニ寫像サ
レ, 且ツ不動点ヲ含マナイ。

區間 (α, β) ヲソレ自身ニ一對一連続デ且ツ不動点ヲ含

マ×寫像ハ直線全体ノ上ノ点ノ Translation (移動)

ト Topologisch isomorph (位相幾何學的 = 同型) デアル。即チ次ノ函数方程式

$$\boxed{\varphi(t+1) = F(\varphi(t))}$$

ガ $(-\infty, \infty)$ = 於テ純單調増加連続函数 $x = \varphi(t)$

$$\left[\lim_{t=-\infty} \varphi(t) = \alpha, \quad \lim_{t=+\infty} \varphi(t) = \beta \right] \text{ヲ解トシテ}$$

有スル $[x = \varphi(t) \text{ ハ全直線 } (-\infty, +\infty) \text{ ヲ區間 } (\alpha, \beta) \text{ = 寫像スル}]$

何トナレバ x_0 ヲ (α, β) 内ノ任意ノ一点トシ

$$F(x_{n-1}) = x_n$$

= ヨリ順次 = x_1, x_2, x_3, \dots ヲ, 又逆 = x_{-1}, x_{-2}, \dots ----- ヲ順次 = 定義スレバ ($F(x) > x$ ト假定スレバ)

$$\alpha < x_{n-1} < x_n < \beta$$

ヲ得ル。 ($F(x)$ ノ純單調性 = ヨル)

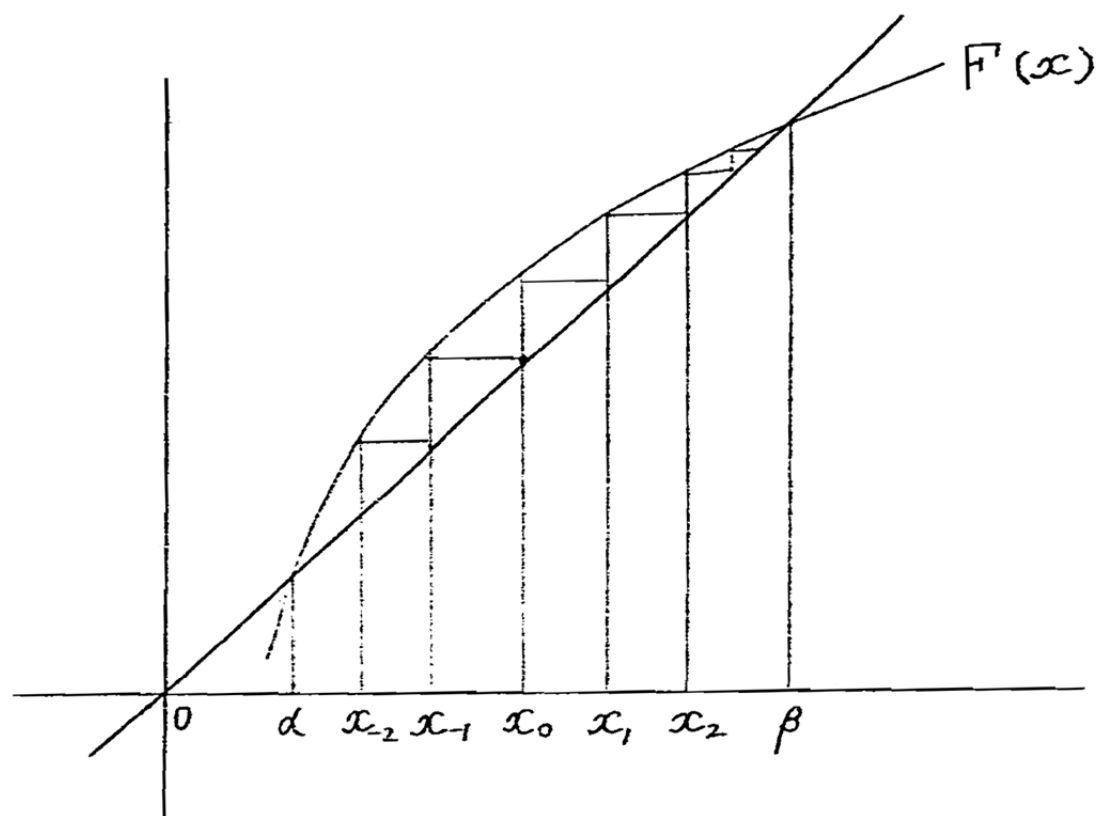
ソレカラ開區間 $[x_{n-1}, x_n]$ ハ寫像 $x' = F(x) = \text{ヨリ}$ 、丁度隣リノ區間 $[x_n, x_{n+1}] = \text{對テ連続} = \text{寫像サレ}$ ル。

今 $\varphi(t)$ ヲバ

$$\varphi(0) = x_0$$

$$\varphi(1) = x_1$$

トシ, $0 \leq t \leq 1$ デ純單調増加连续函数 (但シ任意) トスレバ



$$\varphi(t+1) = F(\varphi(t))$$

=ヨリ、順次 $1 \leq t \leq 2, 2 \leq t \leq 3, \dots$,
 $n-1 \leq t \leq n$ = 於ケル $\varphi(t)$ が自然 = 義的 = 決定サレ
ル。 ($-1 \leq t \leq 0, -2 \leq t \leq -1, \dots$ = 同様) カクシ
テ得ラレタ $\varphi(t)$ ハ求ムル性質ヲ具ヘテキル。

II. $\forall x \in f(x)$ 7 ヲ $(\alpha, \beta) =$ 於テ $(F(x) \neq x \text{ ナル所})$

$$f(x) = \varphi\left(\varphi^{-1}(x) + \frac{1}{k}\right)$$

(k ハ自然數) トシ、 $F(x) = x$ ナル点ヲハ

$$f(x) = x$$

ト定義スレバ、 $f(x)$ ハ $a \leq x \leq b$ 7 純單調増加連続ナル

$$f(a) = a, \quad f(b) = b$$

且ツ

$$\underbrace{f(f(\dots(f(x))\dots))}_{k \text{ 回}} = F(x)$$

$$\text{トナル} [\varphi(\varphi^{-1}(x)+1) = F(x) = \text{ヨル}]$$

以上ノ形ノ解が問題ノ條件ノ下ニ於テ一般解ナルコトハ
次ノ如ク示シテ可ル。

$f(x) = x'$ ナル寫像ノ不動点ハ、 $f(x) = x'$ ヲ繰返
シテ得ラレル $F(x) = x'$ ノ不動点デアアル。又 $f(x) = x'$,
相隣ルニツノ不動点 α, β ノ間デハ常ニ $f(x) > x$ 又ハ
 $f(x) < x$ ナルニヨリ、常ニ $F(x) > x$ 又ハ $F(x) < x$ デ
ナケレバナラヌ。

故ニ (α, β) ニ於テ、前ト同様ニ

$$\psi\left(t + \frac{1}{k}\right) = f(\psi(t))$$

ヲ満足スル $(-\infty, +\infty)$ デ純單調増加ニ意函数

$\psi(t)$ [$\psi(-\infty) = \alpha, \psi(+\infty) = \beta$] が得ラレル、故ニ
 (α, β) デ

$$f(x) = \psi\left(\psi^{-1}(x) + \frac{1}{k}\right)$$

從ツテ之ヲ k 回繰返シテ

$$F(x) = \psi(\psi^{-1}(x) + 1)$$

$x = \psi(t)$ トオイテ

$$\psi(t+1) = F(\psi(t))$$

即チ $f(x)$ ハ與ヘラレタ條件ノ下ニ於テ一般解デアアル。

以上ノ方法ノ根本ハ 區間ノ不動点ノナイ自己寫像ハ全直
線ノ Translation ト位相幾何學的ニ同型デアアルトイ
フ考ヘニ歸スルノデアアル。

上ノ方法=ヨレバ

$$f(x, \theta) = x',$$

[但シ $f(x, \theta) = \varphi(\varphi^{-1}(x) + \theta)$], ハ θ ヲばらめた—ト
スル *additive* ナ連続群ヲ作ル。

茲デハ実変数ノ場合ノミヲ考察シタガ、複素函数論的=
考察スレバ可ナリ趣キノ異ツタ結果が得ラレル様ナ氣ガスル。

——(以 上)——